MA1 1. a 2. cvičení – opakování středoškolské matematiky – výběr příkladů 1
(pro „naši“ matematiku zvláště potřebných partií; trošku „obtížnější“ příklady mají *)

Předpoklad – známe množinu R reálných čísel, zvládáme „počítání“ v R a pravidla uspořádání R.

„Jazyk“ matematiky - výrok, skládání výroků, výrokové formy a zápis pomocí kvantifikátorů, „co je“ definice, věta, důkaz
(nejprve si zkuste aspoň přečíst a porozumět zadání problémků, a můžete se samozřejmě pokusit i o jejich řešení)

1. Rozhodněte pravdivosti výroku:
   a) funkce $f(x)=x^2$ je rostoucí na intervalu $(0,\infty)$;
   b) funkce $f(x)=x^2$ je rostoucí v R ;
   c) $\exists x \in R:\ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$ (budeme spíše psát $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$) ;
   d) $\forall x \in R:\ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$;
   e*) k funkci $f(x)=x^2$ na intervalu $(0,\infty)$ existuje funkce inverzní;
   a obecněji: je-li funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu (a,b) , pak existuje k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) funkce inverzní.

2. Vysvětlete a pak negujte následující výroky ($f(x)$ je reálná funkce definovaná v intervalu (a,b)):
   a) $\forall x \in (a,b):\ |f(x)| \le 1$;
   b) $\exists c>0\ \forall x \in (a,b):\ |f(x)| \le c$;
   c) $\forall c>0\ \forall x \in (a,b):\ |f(x)| \le c$;
   d) $\exists a \in R\ \exists \varepsilon>0\ \forall x \in R:\ |f(x)-a| \le \varepsilon$.

3.* Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní (a zapamatujte si):

   (i) $V \Rightarrow W$; (ii) $\neg W \Rightarrow \neg V$; (iii) $\neg V \vee W$; (iv) $\neg(V \wedge \neg W)$.

   A promyslete ekvivalenci výroků (i) – (iv) pro $V: x \in A$ a $W: x \in B$, kde $A \subseteq M,\ B \subseteq M$ (A,B,M jsou množiny) .

A něco množinového počtu:

1. Buď $A,B \subseteq R$, kde $A=\{a \in R; |a-1|<2\}$ a $B=\{b \in R; |b+2| \ge 2\}$.
   Najděte množiny $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \times B$.

2.* Promyslete ekvivalenci výroků (i) – (iv) z příkladu I./3 pro $V: x \in A$ a $W: x \in B$, kde $A \subseteq M,\ B \subseteq M$ (A,B,M jsou množiny) .

3.* Ukažte, že platí (A,B,C jsou množiny):
   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
   e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Množina R reálných čísel, „počítání“ v R.

I. Řešení rovnic a nerovnic (v R) :

I. Řešení rovnic a nerovnic (v R) :

1. kvadratických:

a) $(x^2+2)(x-1)=0$ d) $3x^2+x=0$ g) $x^2+3x+1\geq -1$

b) $(x^2+2)(x-1)<0$ e) $3x^2+x\geq 0$ h) $x^2+4x+4<-1$

c) $(x+2)(x-1)=0$ f) $x^2\leq 4$

2. s neznámou ve jmenovateli:

a) $\frac{1}{x}\geq 2$ b) $1<\frac{3x-1}{x-2}$ c) $\frac{x^2-1}{x+3}\leq 0$ d) $\frac{x-1}{x+1}>\frac{x}{x-2}$

3. s odmocninami:

a) $\sqrt{x+2}<1$ b) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>2$ c)* $\sqrt{x-2}+x>4$ d)* $\sqrt{x^2+2x-3}\geq\sqrt{x^2+3x-4}$

II. Absolutní hodnota (v R).

1*. Vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla:
Pokuste se ukázat, a hlavně si připomeňte, že pro libovolná $a,b,c\in R$ platí:

i) $|a+b|\leq|a|+|b|$, a odtud už lze snadno ukázat, že také platí $|a-b|\leq|a|+|b|$;

ii) $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$ (t.zv. trojúhelníková nerovnost);

iii) $|a\cdot b|\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ (užitečná nerovnost)

iv) $|a|=\max(a,-a)$;

v) $a\leq c \wedge -a\leq c \Rightarrow |a|\leq c$;

2. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou:

i) $||x-2|-3|=5$

ii) $|x-2|\leq 1$ iii) $|x+3|>4$ iv) $|x-1|<3 \wedge |x+5|\geq 4$ (soustava nerovnic)

v) $|x-1|<|x+5|$ vi) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 1$